EPREUVE SPECIFIQUE AU CONCOURS CH-TB

Durée : 4 heures

On propose de déterminer des solutions de l'équation différentielle :

$$(1) \qquad (x^2 - x)y'' + (x+1)y' - y = f(x)$$

pour quelques choix particuliers de la fonction f.

Toutes les fonctions dont il est question dans ce problème sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

PREMIERE PARTIE

Dans cette première partie, on cherche les fonctions polynômes solutions correspondant à une fonction f elle-même polynômiale.

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 3 et on note :

- E_n l'espace vectoriel des fonctions polynômes engendré par la base canonique $C_n = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$
- F_n l'espace vectoriel des fonctions polynômes engendré par la base $B_n = (1, x^2, \ldots, x^n)$.

1° Soit φ l'application qui, à toute fonction polynôme P de E_n associe la fonction polynôme $\varphi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}\ ,\ \varphi(P)(x) = (x^2 - x)P''(x) + (x+1)P'(x) - P(x)$$

a. Montrer que φ est un endomorphisme de E_n et en donner la matrice dans la base C_n.

b. Déterminer les valeurs propres de φ . φ est-il diagonalisable ?.

c. Préciser le noyau de φ .

2° Soit ψ la restriction de φ à l'espace F_n

a. Montrer que ψ est un automorphisme de F_n .

b. Déterminer la matrice de son inverse ψ^{-1} dans la base B_n .

c. Préciser, pour k entier naturel différent de 1, les fonctions polynômes solutions de l'équation : $\psi(P)(x) = x^k$

puis celles de l'équation : $\varphi(P)(x) = x^k$.

DEUXIEME PARTIE

Tout en gardant une fonction polynôme comme second membre, on ne se restreint plus aux seules solutions polynômiales, et l'on cherche toutes les solutions de l'équation différentielle sur l'un des trois intervalles :

$$I_1 =]-\infty, 0[\ ,\quad I_2 =]0, 1[\ ,\quad I_3 =]1, +\infty[$$

3° Déterminer les solutions de $(x^2 - x)y'' + (x+1)y' - y = 0$ sur chacun des intervalles I_1, I_2 et I_3 (On pourra remarquer que $x+1$ est solution particulière).

4° Déterminer, pour k entier naturel différent de 1, les solutions de $(x^2 - x)y'' + (x+1)y' - y = x^k$ sur chacun des intervalles I_1, I_2 et I_3 .

5° a. Déterminer les solutions de $(x^2 - x)y'' + (x+1)y' - y = x$ sur chacun des intervalles I_1, I_2 et I_3 .

b. Existe-t-il des solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$?

c. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

TROISIEME PARTIE

Dans cette partie, on cherche des solutions développables en série entière pour un second membre lui-même développable en série entière.

6° Soit f une fonction développpable en série entière, de développement :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

et g une solution de l'équation (1) développable en série entière de développement :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

a. Donner une condition nécessaire sur a_1 pour pour que la fonction g existe.

b. Pour k entier supérieur ou égal à 3, exprimer les coefficients b_k en fonction de b_2 et des coefficients a_k.

7° Dans cette question, la fonction f est définie par : $f(x) = e^x - x$ et l'on cherche la solution particulière définie par $b_0 = 1$ et $b_2 = -1$.

a. Exprimer les coefficients b_k en fonction de k pour k entier supérieur ou égal à 3.

b. Montrer que la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, soit β sa limite.

c. En remarquant que si $3 \le k \le j$ alors $(k-1)(k+1)!\,(k+1)^{j-k} \le (j-1)(j+1)!$ montrer que $|\beta - b_k| \le \dfrac{1}{k(k-1)\,k!}$ et en déduire une valeur approchée à 0,001 près de β.

d. Montrer que la série entière $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ converge sur l'intervalle $]-1, 1[$.

e. Etudier sa convergence en 1 puis en -1.